MATEMATIKK

1 Aritmetikk

1.1 Mengder

Naturlige tall: $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$

Hele tall: $\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$

Rasjonale tall: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ og } b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$

Reelle tall: $\mathbb{R}$

Komplekse tall: $\mathbb{C}$

1.2 Potenser

m og n er heltall. $a \in \mathbb{R}$

1 $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n ganger)

2 $a^0 = 1$

3 $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

4 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

5 $a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

6 $(a^m)^n = a^{mn}$

7 $(ab)^n = a^n b^n$

8 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$

9 $(-a)^n = \begin{cases} a^n, & n \text{ like} \\ -a^n, & n \text{ odde} \end{cases}$

1.3 Røtter

m og n er heltall. $a \in \mathbb{R}$

1 $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}, \quad (a \geq 0, x \geq 0)$

2 $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$

3 $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

4 $\sqrt[n]{a^n} = a$

5 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

6 $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

7 $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

8 $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$

9 $\sqrt[n]{a}\sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}}$

10 $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}, \quad n$ odde, $(a \geq 0)$

1.4 Logaritmer

Logaritmen til et tall er det tallet som grunntallet i logaritmesystemet må opphøyes i for å få tallet. Et negativt tall har ingen logaritme.

Er grunntallet a, får vi

1 $x = a^{\log_a x}$

Briggske logaritmer: grunntall 10
Naturlige logaritmer: grunntall $e = 2{,}718\,281\,828\,45\ldots$

2 $\log_{10} a = \lg a$

3 $\log_e a = \ln a$

Regneregler

Naturlige logaritmer: sett $\log_a = \ln$
Briggske logaritmer: sett $\log_a = \lg$

4 $\log_a 1 = 0$

5 $\log_a a^b = b$

6 $\log_a\left(\dfrac{1}{b}\right) = \log_a(b^{-1}) = -\log_a b$

7 $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

8 $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

9 $\log_a b^c = c \log_a b$

Omregning mellom logaritmesystemer

10 $\log_a c = \log_a b \cdot \log_b c$

11 $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

12 $\lg c = \ln c \cdot \lg e$

13 $\ln c = \lg c \cdot \ln 10$

1 Beskrivende statistikk

Vi lar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være observerte verdier av en målbar størrelse.

1.1 Beliggenhetsmål

Gjennomsnittet: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Medianen: $\tilde{x}$ = den midterste verdien i det ordnete observasjonsmaterialet

Typetallet: Den verdien x_i som forekommer flest ganger

1.2 Spredningsmål

Empirisk standardavvik:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

Variasjonsbredde: $x_{\text{maks}} - x_{\text{min}}$

Kvartilbredde: $\text{kvb} = Q_{\text{øvre}} - Q_{\text{nedre}}$

der Q står for kvartil (engelsk: *quartile*).

1.3 Lineær regresjon

Anta at vi har målepunktene:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

Den rette linja $y = a + bx$ som er best tilpasset punktene når vi bruker minste kvadraters metode på uttrykket $\sum_i (y - y_i)^2$ er gitt ved:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

$$a = \overline{y} - b\overline{x}$$

Korrelasjonskoeffisienten er

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}$$

På vektor-matriseform: Dersom

$$\boldsymbol{y} = [y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n]^\top, \quad \boldsymbol{v} = [a,\ b]^\top$$

og

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^\top$$

slik at

$$\boldsymbol{y} = M\boldsymbol{v}$$

så er

$$\boldsymbol{v} = (M^\top M)^{-1} M^\top \boldsymbol{y}$$

STATISTIKK

1 Klassisk mekanikk

1.1 Kinematikk for translatorisk bevegelse

Rettlinjet bevegelse, definisjoner

Posisjon: $x = x(t)$

Forflytning: $\Delta x = x - x_0$

Fart: $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

Akselerasjon: $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$

$$a = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

Bevegelseslikninger, rettlinjet bevegelse

For $a =$ konstant:

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$

Allment:

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,\mathrm{d}t$$

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,\mathrm{d}t$$

Bevegelse i rommet

Posisjon: $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$

Forflytning: $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$

Fart: $\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$

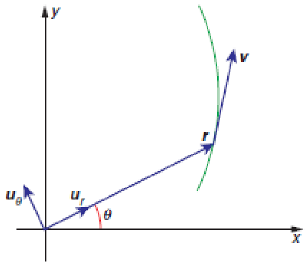
Akselerasjon: $\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$

For krumlinjet bevegelse:

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_{\mathrm{T}} + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{u}_{\mathrm{N}}$$

der R er krumningsradien.

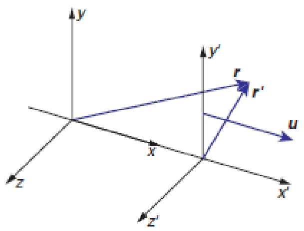
Fart og akselerasjon i polarkoordinater



$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_\theta$$

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2\right)\boldsymbol{u}_r + \left(2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\right)\boldsymbol{u}_\theta$$

Galileitransformasjonene



$\boldsymbol{u} =$ konstant :

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{u}t$$

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}$$

Lorentztransformasjonene

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 + \dfrac{u^2}{c^2}}}$$

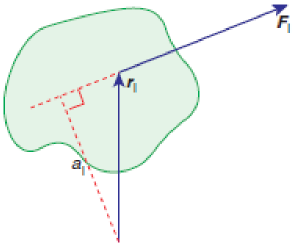
$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \dfrac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}$$

1 Statikk

Kraftmoment



$$M = \sum_i r_i \times F_i$$

$$|r_i \times F_i| = a_i F_i$$

der $F_i = |F_i|$, og a_i er momentarmen.

Likevektsbetingelser

1 $\quad \sum F_i = 0$

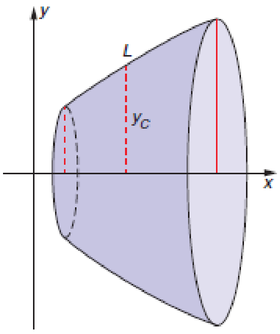
2 $\quad \sum M_i = 0$

Massesenter

$Mr_C = \sum m_i r_i$

$Mr_C = \int r \, \mathrm{d}m = \int \rho r \, \mathrm{d}V$

Pappus' setninger

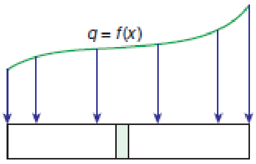


Areal av omdreiningslegeme: $\quad A = 2\pi y_C L$

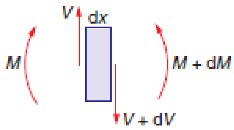
Volum av omdreiningslegeme: $\quad V = 2\pi y_C A$

Generell belastning

V = skjærkraft



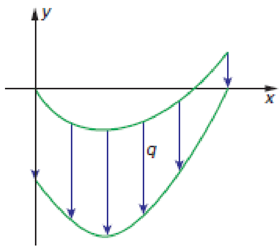
$$q = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$$

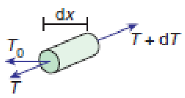


$$V = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}$$

$R = \int q \, \mathrm{d}x$ er resultantkraften

Fleksibel kabel





Varierende last, $q = f(x)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{q}{T_0}$$

der T_0 er konstant langs hele kabelen.